

流體的質能均衡

單元學習內容

- ◆ 流體的質量均衡
- ◆ 機械能方程式
- ◆ 柏努力方程式
- ◆ 托里切利方程式
- ◆ 流體的輸送功率

流體流動的質量均衡

✿ 穩定狀態 (steady state): 流體在管內做連續性流動，當管內各地方的流速，溫度，壓力都不隨時間改變時，稱之。

此時管內上游與下游兩處的質量流率必相等，即

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

此式可稱為連續方程式

連續方程式

(Equation of continuity)

🌸 連續方程式

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

可寫成

$$\dot{V}_1 \rho_1 = \dot{V}_2 \rho_2$$

$$\bar{u}_1 \rho_1 A_1 = \bar{u}_2 \rho_2 A_2$$

對不可壓縮流體而言， ρ 為定值

則

$$\bar{u}_1 A_1 = \bar{u}_2 A_2$$

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

連續方程式例題

✿ 已知水的密度及黏度分別為 1.0 g/cm^3 及 1 cp ，今水以 1.0 m/s 的速度流過一噴嘴，噴嘴的入口直徑為 18 cm ，出口直徑為 6 cm ，求離開噴嘴的速度為多少 m/s ？

連續方程式例題解答

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 \times \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

$$= 1.0 \times \left(\frac{18}{6} \right)^2$$

$$= 9\text{m/s}$$

機械能方程式-1

(Equation of mechanical energy)

🌸 機械能方程式

$$\frac{\bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \Sigma F + W_S = 0$$

註：系統中有泵時，外界對系統作功， W_S 為負；
有渦輪時，系統對外界作功， W_S 為正

機械能方程式- 2

□各項說明

□單位: J/Kg

➤動能勢能

$$\frac{\bar{u}_2^2 - \bar{u}_1^2}{2}$$

➤位置勢能

$$g(z_2 - z_1)$$

➤壓力勢能

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

➤摩擦勢能

$$\Sigma F$$

➤軸功

$$W_s$$

摩擦勢能

✿ 流體流經管路的摩擦包含兩種

➤ **表面摩擦 (skin friction)**：即流體流經管路時，流體與管壁所造成的機械能損失。

➤ **形態摩擦 (form friction)**：即流體與管件所造成的機械能損失。

表面摩擦

🌸 流體流經圓管的表面摩擦可以由泛寧方程式 (Fanning's equation) 來表示

$$F_f = \frac{-\Delta P_f}{\rho} = 4f \frac{\rho \bar{u}^2}{2g_c} \frac{L_e}{D}$$

$$-\Delta P_f = P_1 - P_2 = R_m (\rho_m - \rho) \frac{g}{g_c}$$

摩擦係數(friction factor), f

✿ 定義：流體流經水平圓管所產生的剪應力與流體單位體積所具有的動能的比值。即

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2g_c}}$$

✿ f 沒有單位

莫第圖 (Moody diagram)

✿ 為摩擦係數對雷諾數的實驗值，再以全對數座標繪成的圖。

摩擦係數與雷諾數的關係-1

✿ 層流 $Re < 2100$

$$f = \frac{16}{R_e}$$

摩擦係數與雷諾數的關係-2

❁ 亂流 $Re > 4000$

- ❖ f ：與雷諾數 Re 及管子的相對粗糙度 e/D 有關。
- ❖ 同一管子（即相對粗糙度相同）， f 會隨 Re 的增加而減少；當 Re 大於某一定值時， f 也會趨於一定值。
- ❖ 雷諾數固定時，管子愈粗糙， f 愈大。

形態摩擦

🌸 流體流經管件所造成的機械能損失亦可以用泛寧摩擦方程式來表示，不同的地方在管長改以管件的相當管長來表示

$$F_f = \frac{-\Delta P_f}{\rho} = 4f \frac{\rho u^2}{2g_c} \frac{L_e}{D}$$

形態摩擦種類

✿ 管件摩擦

✿ 突增摩擦

✿ 突縮摩擦

軸功-- 1



$$\eta_p = \frac{P_f}{P_b} \times 100\%$$

❖ η_p : 泵效率

❖ P_f : 流體的功率 $P_f = \dot{m} \times W_s$

❖ P_b : 流體的制動馬力

軸功-- 2

✿ 渦輪機

$$W_s = \frac{W_t}{\eta_t}$$

❖ η_t : 渦輪機效率

❖ W_t : 流體流經渦輪機輸出的功

❖ W_s : 流體作用於渦輪機的功

軸功率的計算-- 1

🌸 泵功率的計算

❖ 流體馬力(P_f)：泵單位時間作用流體的功

$$P_f = \dot{m} \times W_s = \dot{m} \times \eta_p W_p$$

❖ 制動馬力(P_b)：泵單位時間輸出的功

$$P_b = \dot{m} \times W_s = \dot{m} \times W_p$$

軸功率的計算-- 2

🌸 渦輪機功率的計算

➤ 渦輪機功率：單位時間經過渦輪機輸出的功

$$P_t = \dot{m} \times W_t = \dot{m} \times \eta_t W_s$$

軸功的計算

✿ 一泵作用於流體的軸功為 156 J/Kg ，輸送體積流率為 $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ 的水，若泵效率為 0.7 ，則泵的制動馬力為多少馬力？

軸功的計算解

✿ 泵作用於單位質量流體的功 = 156 J/Kg

✿ 泵對單位質量流體所需輸出的功

$$w_p = \frac{156}{\eta_p} = \frac{156}{0.7} = 222.86 \text{ J/Kg}$$

✿ 流體的質量流率

$$\dot{m} = \dot{V} \rho = 1000 \times 0.01 = 10 \text{ Kg/s}$$

✿ 泵的制動馬力

$$P_B = \dot{m} w_p = 10 \times 222.86 = 2228.6 \text{ J/s} = 3 \text{ hp}$$

機械能平衡的計算

✿ 水經由導管流入渦輪機，再經由相同的導管流出，高於渦輪機 300 ft 處的導管壓力為 300 psia，低於渦輪機 10 ft 處的導管壓力為 18 psia，水流量為 3600 ton/h，經由渦輪機輸出的功率為 1000 hp，渦輪機的效率為 0.9，則管路摩擦為多少 $\text{lb}_f\text{-ft}/\text{lb}$ ？

機械能平衡的計算解

✿ 水的質量流率為

$$\dot{m} = \frac{3600\text{ton}}{\text{hr}} \times \frac{2000\text{lb}}{1\text{ton}} \times \frac{1\text{hr}}{3600\text{s}} = 2000\text{lb/s}$$

✿ 渦輪機的輸出功為

$$W_t = \frac{P_t}{\dot{m}} = \frac{1000\text{hp} \times (550\text{ft} \cdot \text{lb}_f / 1\text{hp})}{2000\text{lb/s}} = 275\text{ft} \cdot \text{lb}_f / \text{lb}$$

✿ 機械能方程式為

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{P_1 - P_2}{\rho} + \frac{g}{g_c} (z_1 - z_2) - \frac{W_t}{\eta_t} \\ &= \frac{(300-18) \times 144}{62.4} + \frac{32.2}{32.2} \times 310 - \frac{275}{0.9} = 655\text{lb}_f \cdot \text{ft}/\text{lb} \end{aligned}$$

柏努力方程式 (Bernoulli' s equation)

✿若系統中沒有泵或渦輪及忽略
摩擦時,則機械能方程式可寫成

$$\frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = 0$$

托里切利定律 (Toricelli's law)

✿ 如圖所示

$$\frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = 0$$

因

$$\bar{u}_2 \gg \bar{u}_1 \text{ 且 } P_1 = P_2$$

$$z_2 - z_1 = -H$$

∴

$$\bar{u}_2 = \sqrt{2gH}$$

$$\dot{V} = \bar{u}_2 A_2 = \bar{u}_2 \times \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} D^2 \times \sqrt{2gH}$$

托里切利定律的計算

✿ 有一高度為3m的開放式水槽，底部裝有一直徑為0.02m的水平管，用以洩水，當洩水管打開時，它的體積流率為多少 m^3/s ？

托里切利定律的計算解答

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} \times D_2^2 \sqrt{2gH}$$

$$= \frac{\pi}{4} \times (0.02)^2 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 3}$$

$$= 2.41 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$