投稿類別:工程技術類

篇名:軸的應力分析，〝圓〞來可以這麼簡單

作者:
楊景翔。臺北市立松山高級工農職業學校。機械科三年智班
陳柏勳。臺北市立松山高級工農職業學校。機械科三年智班

指導老師:
蔡宏谷老師
胡銘軒老師

壹●前言

一、研究動機

高二接觸機械力學的時候，老師常常用厲害的數學邏輯，推導出一個漂亮的公式，再用這項結果解決許多題目。但是以學生的立場，這些公式幾乎只能用死背的，若遇到範圍大的考試或是稍微進階一點的難題，容易和其他類似的公式搞混甚至會背錯並誤導自己的觀念。因此我想要探討機械力學中是否有些公式可以用另一種更利於記憶和計算的取代方法。

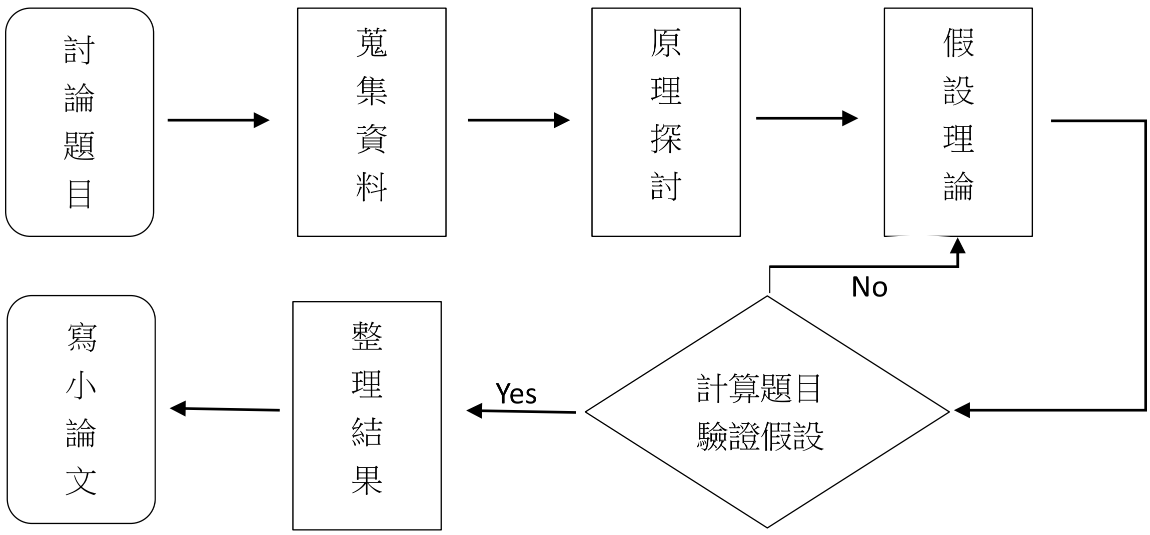
二、研究目的

本篇的研究目的主要是探討材料力學中在計算雙軸向應力時，我們通常要使用大量的公式來計算。另一種則是單純以畫圖就可進行解析的方法─莫耳圓，只不過要用此方法的前提是σ_x必須大於σ_y（李榮華，2015）。因此，我們想要瞭解除了用公式計算外，是否能僅僅利用莫耳圓來達到以下兩種目的。

(一)探討莫耳圓應用於單軸向應力試題之計算方法。
(二)研究若遇到$\sigma_y>\sigma_x$之條件時，該如何使用莫耳圓進行解題。

三、研究流程

本研究訂立題目後，便開始蒐集有關單軸向及雙軸向應力參考書籍與其他相關參考書、歷屆模擬考和統測的題目。之後進行原理方面的探討並假設理論，再與老師進一步的討論和驗證，最後將計算出來的結果加以整理，以小論文的形式呈現。



圖一、研究流程圖

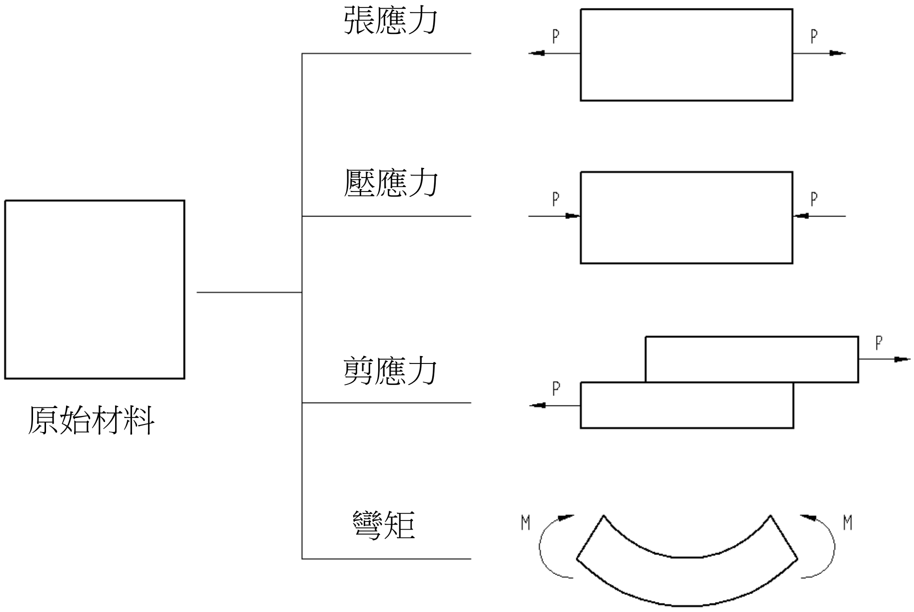
貳●正文

本研究以蒐集文獻的方式來探討力與應力之間的關係，再從中理解莫耳圓的由來和使用方法，接著依假設理論畫出莫耳圓，經與公式法所得之結果比對後，記錄結論並加以整理。

一、力與應力之探討

(一)力的內效應

假設材料為彈性體（變形體）的情況下，當材料受外力 P 作用而無進行運動時，必定會對材料產生張應力、壓應力、剪應力及彎矩應力，有些是只有受單力作用，亦有兩種或兩種以上之力同時作用，如圖二。在本研究僅探討材料在單（雙）軸向受到張（壓）應力作用下，任一截面所生成之正交應力及剪應力。



圖二、內效應示意圖

(二)應力之定義

單位面積上所受的力，稱為應力，應力單位通常為kg/cm^2、$\mathrm{lb/in}^2$、MPa($10^6N/m^2$)、GPa($10^9N/m^2$)等。而若要令公式成立，材料需為均質且相等截面積；所受之外力作用線通過材料形心，與材料軸線一致，即稱軸向負荷（陳崇彥，2015）。應力依所受力之面積方向可區分為正交應力及正切應力。

1.正交應力

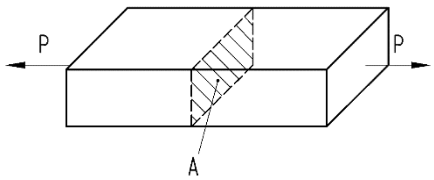
即公式為 $\sigma = \frac{P}{A}$（P:作用之外力、A:力作用之面積）

(1) 拉應力

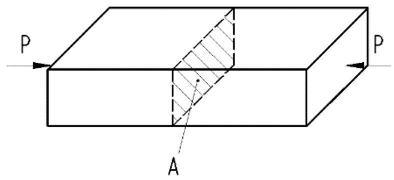
材料受拉力時（所受之外力需與受力面積垂直，即正交應力），單位面積上所產生之應力，稱為拉應力，亦稱為張應力，如圖三所示。

(2) 壓應力

材料受壓力時（所受之外力需與受力面積垂直，即正交應力），單位面積上所產生之應力，稱為壓應力，如圖四所示。



圖三、拉應力

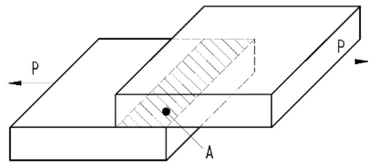


圖四、壓應力

2.正切應力

其原理類似於上述之應力，當物體受外力作用，使其沿一部分發生剪斷或滑動現象時，此外力稱之為剪力（戴麒、裴永俊，2015）。剪力與作用面平行，而單位面積上產生之應力，即稱為剪應力，亦稱正切應力，如圖五，即剪應力之公式為 $\tau = \frac{P}{A}$

P:剪力之負荷
A:受剪力之面積

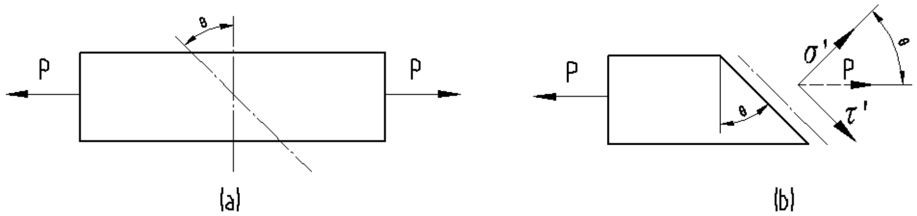


圖五、剪應力示意圖

二、材料在任意截面之應力計算

(一)正交應力與剪應力之關係

當材料受外力P時除了有軸向應力外，在橫截面夾θ角之任意斜面上，會有正交應力與正切應力同時存在之可能，如圖六所示。



圖六、單軸向應力

(二)如圖六(b)，在單軸受力的前提下，我們可獲得σ′及τ′之計算公式

$\sigma' = \frac{Pcos\theta}{Asec\theta} = \frac{P}{A}cos^2\theta$ ……(1)　、　$\tau' = \frac{Psin\theta}{Asec\theta} = \frac{P}{2A}sin2\theta$ ……(2)

通過上述公式得知，當 θ= 0°時，σ'為最大值，即材料之橫截面正交應力最大；當 θ= 45°時，τ'為最大，即材料在 45°斜截面上之剪應力最大，且等於正交應力之半。

(三)雙軸向應力之計算

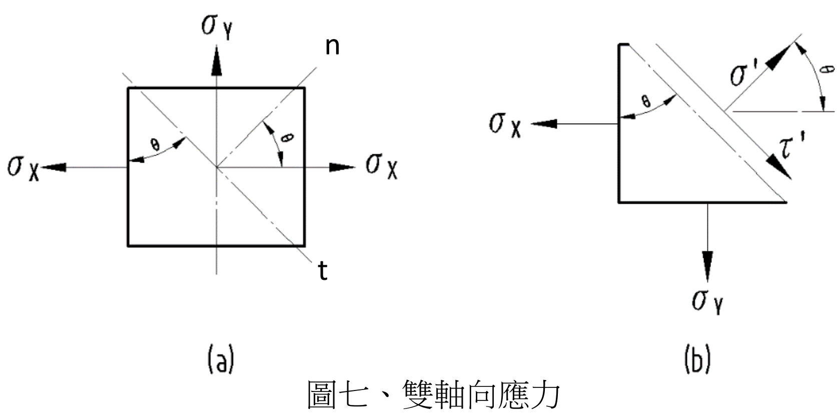
如圖七所示，設σ'作用面上之面積為A′，則σ_x作用面上之面 積為A′cosθ；σ_y作用面上之面積為$A' \sin\theta$，可得平衡方程式：

$$\sum F_n = 0,\ \sigma' A' - \sigma_x cos\theta(A' cos\theta) - \sigma_y sin\theta(A' sin\theta) = 0$$

$$則\sigma' = \sigma_x cos^2\theta + \sigma_y sin^2\theta \ \ ……(3)$$

$$\sum F_t = 0,\ \sigma' A' - \sigma_x cos\theta(A' cos\theta) - \sigma_y sin\theta(A' sin\theta) = 0$$

$$則\tau' = (\sigma_x + \sigma_y)\sin\theta cos\theta \ \ ……(4)$$



圖七、雙軸向應力

再以三角函數之關係

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$sin\theta cos\theta = \frac{1}{2}sin2\theta$$

代入公式(3)及(4)中

$$\sigma' = \frac{1}{2}\sigma_x(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2}\sigma_y[1+\cos 2\,(90°+\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_x(1+\cos 2\theta) - \frac{1}{2}\sigma_y(1-\cos 2\theta)$$

則$\sigma' = \frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta$ ……(5)

$$\tau' = \frac{1}{2}\sigma_x\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sigma_y\sin 2(90+\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_x\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sigma_y\sin 2\theta$$

則$\tau' = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta$ ……(6)

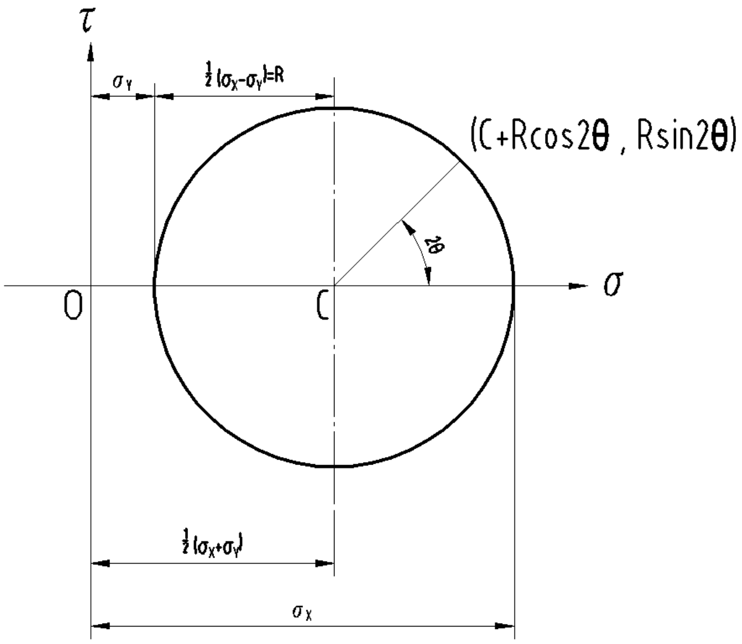
(四)繪製莫耳圓之步驟

1. 畫出以 σ 為 x 軸、τ 為 y 軸之平面座標系。
2. 標出σ_x與σ_y兩點，σ_x大於σ_y時，以兩點之中點定圓心，即

   圓心$C = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$。

3. 求出半徑長，即半徑$R = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)$。
4. 以σ_x、σ_y為直徑畫出莫耳圓，根據作用面與主平面之夾角θ判斷順、逆時針，並以 2θ繪出，如圖八。
5. 作用面上之正交應力σ'與剪應力τ'，如下所示:

   $$\sigma' = C + R\cos 2\theta、\tau' = R\sin 2\theta$$



圖八、莫耳圓

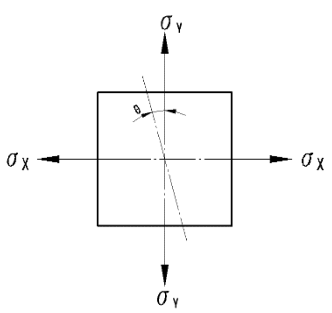
三、假設莫耳圓的理論

(一)若材料之受力為單軸向，則可令$\sigma_y = 0$，即左直徑點落在原點上。

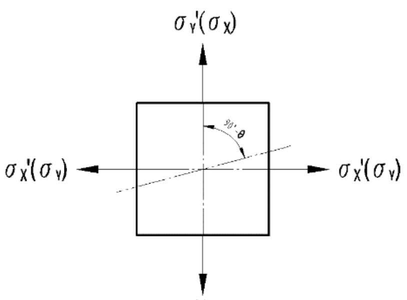
從課本及一些相關參考書中，莫耳圓都是用來計算雙軸向應力的輔助圖形，以避免搞混那些大量且複雜的公式。但是根據課本裡解單軸向應力的過程，都是使用一開始推導出的公式解題。因此我假設σ_y為 0，這樣就可以使用莫耳圓進行計算，少記一些公式。

(二)若遇到σ_y>σ_x的條件時，則翻轉圖形90°。

如圖九，當我們在題目中遇到 Y 軸應力大於 X 軸時(σ_y>σ_x)，俗話說「路不轉，人轉」，因此可假設將圖形順（逆）時針翻轉90°，令原本的$\sigma_y = \sigma_{x\prime}$、$\sigma_x = \sigma_{y\prime}$，來滿足$\sigma_x > \sigma_y$的必要條件，即可符合繪製莫耳圓步驟 2 之原則，再重新計算角度，如圖十。



圖九、原圖



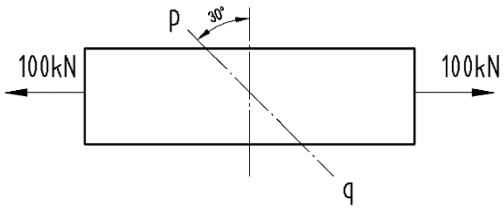
圖十、90°旋轉後

四、以題目驗證假設

(一)計算單軸向應力之證明

範例 1

每邊長為 50mm 之矩形鋼桿，承受軸向張力 P 為 100kN，如圖十一所示，試求 其在θ角為30°之 pq 上的正交應力及剪應力。 （李榮華，2015）



圖十一

1.課本解法: $P = 100\text{kN} = 100\text{N} \times 10^3 N$，代入公式(1)、(2)中

$$\sigma' = \frac{P}{A}cos\theta = \frac{100\times10^3}{50^2} \times cos^2(30°) = 30(MPa)$$

$$\tau' = \frac{P}{2A}sin2\theta = \frac{100\times10^3}{50^2} \times \sin(2 \times 30°) = 17.32(MPa)$$

2.假設解法: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\times10^3}{50^2} = 40(MPa)$

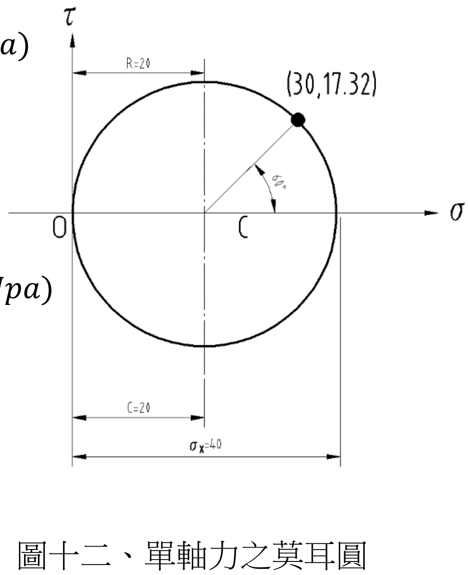
$$C = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}(40 + 0) = 20(MPa)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right) = \frac{1}{2}(40 - 0) = 20(MPa)$$

繪出之莫耳圓，如圖十二

$$\sigma' = C + R\cos2\theta = 20 + 20 \times \frac{1}{2} = 30(Mpa)$$

$$\tau' = R\sin2\theta = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17.32(MPa)$$



圖十二、單軸力之莫耳圓

3.驗證結果

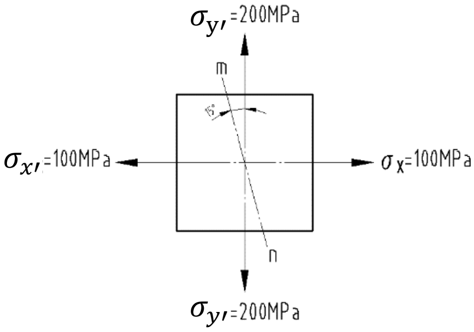
經過比對後，證明假設是合理並可執行的。不過為了確認這次結果並不是僥倖，我便進一步的與老師討論，再經過其他多次的計算結果，確定此假設結果成功。

(二)在$\sigma x < \sigma y$時，翻轉圖形之證明

範例 2

如圖十三所示，為一邊長 10cm 之正方體，承受雙軸向張力作用，若產生之張應力分別為$\sigma_x = 100MPa$、$\sigma_y = 200MPa$，設其材料之彈性係數為$200GPa$，蒲松氏比為0.2，則在 mn 斜截面上之正交應力σ_n與剪應力τ_n分別為多少? （102 學年度統一入學測驗第五次聯合模擬考試題本，2013）

(A) $\sigma_n = 193.3MPa$、$\tau_n = 25MPa$
(B) $\sigma_n = 106.7MPa$、$\tau_n = -25MPa$
(C) $\sigma_n = 106.7MPa$、$\tau_n = 25MPa$
(D) $\sigma_n = 193.3MPa$、$\tau_n = -25MPa$



此題答案為(B)

圖十三

1.公式解: $\sigma_x = 100Mpa$、$\sigma_y = 200Mpa$、$\theta = 30°$，代入公式(5)、(6) 中

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(100 + 200) + \frac{1}{2}(100 - 200)\cos(2 \times 15°) \\ &= \frac{1}{2} \times 300 - \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 150 - 25\sqrt{3} \\ &\cong 106.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(100 - 200)\sin 60° \\ &= -25\end{aligned}$$

2.翻轉圖形之解法

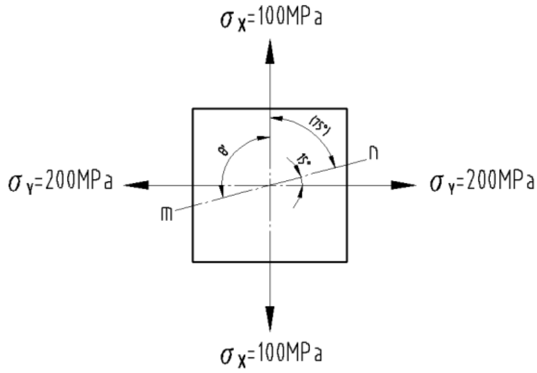
因為題目的已知條件$\sigma_x < \sigma_y$，因此不符合作圖邏輯（圓之右直徑點座標值必須大於左直徑點座標值），故無法進行繪製莫耳圓。因此產生以下步驟:

(1)將圖十一逆時針翻轉90°成圖十四

令$\sigma_x = \sigma_{y'}$、$\sigma_y = \sigma_{x'}$

(2)重新計算作用面與主平面之夾角為

$\theta' = 90° + 15° = 105°$



圖十四

(3)計算中心 C 及半徑 R:

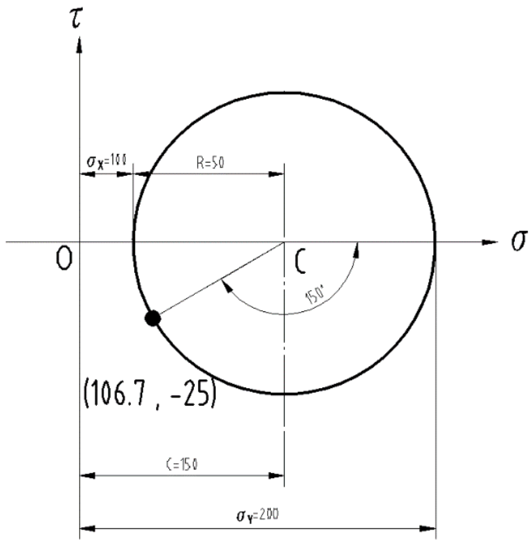
$$C = \frac{1}{2}(\sigma_{x'} + \sigma_{y'}) = \frac{1}{2}(200 + 100) = 150(MPa)$$

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_{x'} - \sigma_{y'}) = \frac{1}{2}(200 - 100) = 50(MPa)$$

(4)繪製莫耳圓，如圖十五

$$\begin{aligned}\sigma_n &= C + R\cos 2\theta \\ &= 150 + 50\cos(2 \times 105) \\ &= 150 + \left(-25\sqrt{3}\right) \\ &\cong 106.7(MPa)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_n &= R\sin 2\theta \\ &= 50 \times \sin(2 \times 105) \\ &= 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -25(Mpa)\end{aligned}$$



圖十五

3.驗證結果

一開始試著代入公式，發現結果是可以被計算出來的。之後試著畫出莫耳圓，卻發現$\sigma_x < \sigma_y$的限制，沒辦法畫出莫耳圓。後來我使用假設之算法，將圖形旋轉90°後重新繪製莫耳圓，便成功將答案計算出來，因此證明出若將圖形旋轉，使得 X 方向之應力大於 Y 方向之應力之下，即可進行莫耳圓之應力分析。

參●結論

經過研究者以計算之方式驗證假設，並與老師討論後的結果，所研究之結論如下:

一、可使用莫耳圓進行單軸向應力之計算

在材料承受單軸向應力時，我們可以令$\sigma_y = 0$，繪製出一個以原點至σ_x為直徑之莫耳圓，再以莫耳圓求出任意截面之應力。同理也可得知雙軸向應力之公式，只要令$\sigma_y = 0$也可以計算出相同的結果。

二、當$\sigma_x < \sigma_y$時，則先行旋轉圖形90°再繪製出莫耳圓進行應力分析

當材料受雙軸向應力且$\sigma_x < \sigma_y$時，直接畫出莫耳圓會發現不合邏輯，只能使用公式解進行運算。但若將圖形旋轉，令原本的$\sigma_x = \sigma_{y\prime}$、$\sigma_y = \sigma_{x\prime}$，即可使用莫耳圓進行應力分析。只是在旋轉的過程中，因為所要計算之斜截面也跟著旋轉，因此要記得重新計算作用面與主平面之夾角（若令原夾角為θ，逆時針轉90°，即新夾角$\theta' = 90° + \theta$；若為順時針，$\theta' = 90° - \theta$）。

三、研究心得

我們從一開始搜尋資料、公式理論到自己假設，即使對自己的計算能力有些許的自信，在過程中還是被密密麻麻的數字和符號弄到頭疼。在經過大量計算與老師討論的過程中我也更清楚的了解應力的重要性、發現到許多老師沒有清楚講述到的觀念，同時也對先人的智慧也感到讚嘆且崇拜，竟然有人可以把大量的數學公式以一個簡單的輔助圖形來詮釋。若未來討論到材料受到三軸向應力時，或許也可找出個〝莫耳球〞來做相對應之應力分析。

肆●引註資料

一、陳崇彥(2015)。**機械力學 II**。台北市:華興文化。
二、戴麒、裴永俊(2015)。**機械力學升學寶典**。新北市:台科大圖書。
三、李榮華(2015)。**機械力學 II**。新北市:龍騰文化。
四、102 學年度統一入學測驗第五次聯合模擬考試題本（2013）。**機械群—專業科目(一):機件原理、機械力學**，P6。